Blatt 8

Die Lösungen sollten auf URM hochgeladen werden. Abgabetermin: 17.12, 16:00.
Bitte begründen Sie Ihre Lösungen und zeigen Sie Ihre Argumentation auf.
Bitte notieren Sie Ihren Namen und Ihre Immatrikulationsnummer an. Wenn Sie die Aufgaben in einer Gruppe einreichen, reicht es aus, wenn eine Person die Aufgaben für die ganze Gruppe hochlädt.

Aufgabe 8.1 (3 + 4 + 5 + 4 Punkte) Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und sei $\varphi\colon V \to W$ eine lineare Abbildung zwischen endlich-dimensionale $\mathbb{K}$-Vektorräume. Sei $K = \operatorname{Ker}\varphi \subseteq V$.

(i) Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$f = \mathbb{P}(\varphi)\colon \mathbb{P}(V) \setminus \mathbb{P}(K) \to \mathbb{P}(W), \qquad [v] \mapsto [\varphi(v)]$$

wohldefiniert ist.

(ii) Sei $M \subseteq \mathbb{P}(V)$ ein projektiver Unterraum so dass $M \cap \mathbb{P}(K) = \emptyset$. Zeigen Sie, dass

$$f_{|M}\colon M \to \mathbb{P}(W)$$

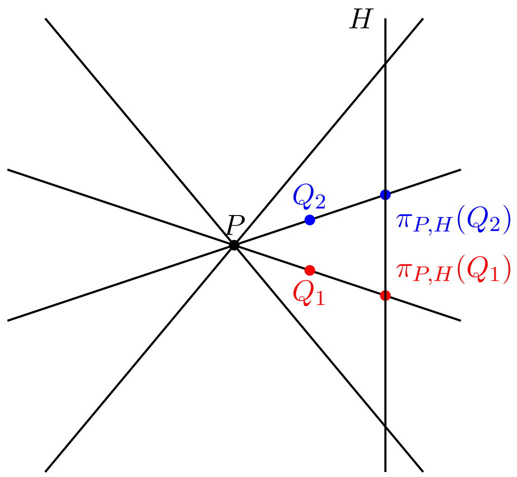
eine projektive Abbildung ist.

Sei nun $P \in \mathbb{P}(V)$ ein Punkt und sei $H \subseteq \mathbb{P}(V)$ eine Hyperebene so dass $P \notin H$.

(iii) Sei $Q \in \mathbb{P}(V) \setminus \{P\}$ und sei $L(P, Q)$ die projektive Gerade zwischen P, Q. Zeigen Sie, dass $L(P, Q) \cap H$ ein Punkt ist, so dass wir die folgende Abbildung haben:

$$\pi_{P,H}\colon \mathbb{P}(V) \setminus \{P\} \to H, \qquad Q \mapsto L(P, Q) \cap H$$

Diese Abbildung heißt die Projektion von P nach H.



Zeigen Sie, dass diese Abbildung von einer nicht-injektive lineare Abbildung wie im Punkt (i) induziert ist. Von welcher lineare Abbildung?

(iv) Seien $P = [0,0,1] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ und $H = \{x_0 + x_1 + x_2 = 0\} \subseteq \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$. Schreiben Sie die Abbildung

$$\pi_{P,H} \colon \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \setminus \{P\} \to H$$

in Koordinaten. Das bedeutet: finden Sie $f_0(x_0,x_1,x_2), f_1(x_0,x_1,x_2), f_3(x_0,x_1,x_2)$ so dass

$$\pi_{P,H}([x_0,x_1,x_2]) = [f_0(x_0,x_1,x_2), f_1(x_0,x_1,x_2), f_3(x_0,x_1,x_2)] \qquad \text{für } [x_0,x_1,x_2] \neq P$$

Aufgabe 8.2 (4 + 4 + 4 Punkte) Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit $\dim V = n+1$. Seien auch $P_i = [v_i] \in \mathbb{P}(V)$ für $i = 1, \ldots, n+2$.

(i) Zeigen Sie, dass $P_1, \ldots, P_{n+2}$ eine projektive Basis von $\mathbb{P}(V)$ sind, genau dann, wenn $v_1, \ldots, v_{n+1}$ eine Basis von V sind, und $v_{n+2} = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i v_i$ mit $\lambda_i \in \mathbb{K}, \lambda_i \neq 0$.

(ii) Zeigen Sie, dass die Punkte

$$P_1 = \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \quad P_2 = \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}, \quad P_3 = \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}, \quad P_4 = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$$

eine projektive Basis von $\mathbb{P}^2(\mathbb{Q})$ abbilden.

(iii) Seien nun

$$E_1 = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \quad E_3 = \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}, \quad E_4 = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$$

Finden Sie eine invertierbare projektive Abbildung $f \colon \mathbb{P}^2(\mathbb{Q}) \to \mathbb{P}^2(\mathbb{Q})$ so dass $f(P_i) = E_i$ für $i = 1, \ldots, 4$. Sie sollen die Abbildung in der Form $f = [A]$, mit $A \in GL_3(\mathbb{Q})$ schreiben.

Aufgabe 8.3 (2 + 4 + 4 Punkte) Seien $\mathbb{K}$ ein Körper, V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit $\dim V = n+1$ und sei $f \colon \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(V)$ eine projektive Transformation. Ein Punkt $P \in \mathbb{P}(V)$ ist ein Fixpunkt für f, wenn $f(P) = P$. Sei nun $\varphi \colon V \to V$ eine lineare Transformation so dass $f = \mathbb{P}(\varphi)$.

(i) Zeigen Sie, dass $P = [v]$ ein Fixpunkt von f ist, genau dann, wenn v ein Eigenvektor von φ ist.

(ii) Zeigen Sie, dass φ diagonalisierbar ist, genau dann, wenn f Fixpunkte $P_1, \ldots, P_{n+1}$ in linearer allgemeiner Lage hat.

(iii) Geben Sie Beispiele von projektive Transformationen $f \colon \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ mit $0, 1, 2$ oder 3 Fixpunkte.